

Решение задачи о движении в массовых координатах Лангранжа

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{g} \right) + \frac{\partial V}{\partial S} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} g + g^2 \frac{\partial V}{\partial S} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial S} = 0, \quad C^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial g} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial S} = \left(\frac{\partial p}{\partial g} \right) \frac{\partial g}{\partial S} = C^2 \frac{\partial g}{\partial S}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} + C^2 \frac{\partial g}{\partial S} = 0; \quad \text{Будем искать стационарное}$$

$$f(z) = f(z(S, t)); \quad \frac{df}{dt} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt} = -\frac{S}{t^2} \frac{df}{dz} = -\frac{z}{t} \frac{df}{dz}; \quad \text{решение } z = \frac{S}{t}, \text{ где } S \text{ и } t$$

$$\frac{df}{\partial S} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial S} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\begin{cases} -\frac{z}{t} \frac{dp}{dz} + g \frac{dV}{dz} \cdot \frac{1}{t} = 0 \\ -\frac{z}{t} \frac{dV}{dz} + C^2 \frac{1}{t} \frac{dg}{dz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z \frac{dp}{dz} + g^2 \frac{dV}{dz} = 0 \\ C^2 \frac{dg}{dz} - z \frac{dV}{dz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = Cg}$$

$$\Rightarrow C^2 \frac{dg}{dz} - Cg \frac{dV}{dz} = 0 \Rightarrow -C \frac{dg}{dz} + g \frac{dV}{dz} = 0. \quad -Cg' + gV' = 0; \quad \frac{p}{g} = \frac{p_0}{g_0}$$

$$C = \sqrt{\frac{p}{g}} = \sqrt{\frac{p_0}{g_0} \frac{g}{g_0}} = \sqrt{\left(\frac{p_0}{g_0} \right) \frac{g^{j-1}}{g_0^{j-1}}} = \sqrt{C_0^2 \left(\frac{g}{g_0} \right)^{j-1}}; \quad -\frac{C}{g} g' + V' = 0 \Rightarrow \frac{-C_0 \left(\frac{g}{g_0} \right)^{\frac{j-1}{2}}}{g} g' + V' = 0$$

$$-\frac{C_0}{g} \left(\frac{g}{g_0} \right)^{\frac{j-1}{2}} g' + V' = 0 \text{ - умножим на } g \text{ до } z \text{ и } z. \text{ считаем } m \text{ и } n \text{ в } \text{уравн. пер.}$$

$$-\frac{C_0}{g_0^{\frac{j+1}{2}}} \cdot \frac{2}{j-1} g^{\frac{j-1}{2}} + V' = 0; \quad \left. \begin{array}{l} g(z_0) = g_0 \\ V(z_0) = 0 \\ C(z_0) = C_0 \end{array} \right| \begin{array}{l} -\frac{C_0}{g_0^{\frac{j+1}{2}}} \cdot \frac{2}{j-1} g_0^{\frac{j-1}{2}} + \frac{C_0}{g_0^{\frac{j+1}{2}}} \cdot \frac{2}{j-1} g_0^{\frac{j-1}{2}} + V = 0 \\ V = \frac{2C_0}{j-1} \left(\frac{g}{g_0} \right)^{\frac{j-1}{2}} - \frac{2C_0}{j-1} \end{array}$$

$$V = \frac{2C_0}{j-1} \left(\left(\frac{g}{g_0} \right)^{\frac{j-1}{2}} - 1 \right); \quad C = C_0 \left(\frac{g}{g_0} \right)^{\frac{j-1}{2}}; \quad z = Cg; \quad z = \frac{S}{t}; \quad z_0 \text{ - можно считать}$$

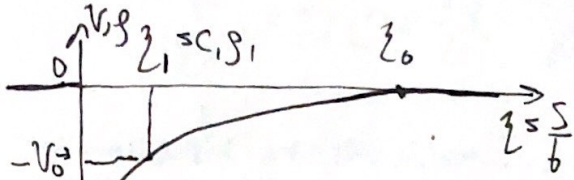
$$z = Cg = C_0 \left(\frac{g}{g_0} \right)^{\frac{j-1}{2}} g; \quad g^{\frac{j+1}{2}} = \frac{z g_0^{\frac{j-1}{2}}}{C_0} = \frac{z g_0^{\frac{j-1}{2}}}{C_0 g_0} = \frac{z}{z_0} g_0^{\frac{j+1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{g}{g_0} \right) = \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{j+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = g_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{j+1}}; \quad C = C_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{j-1}{j+1}}; \quad V = \frac{2C_0}{j-1} \left(\left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{j-1}{j+1}} - 1 \right)$$

автоматич. рещ-е в массовых координатах

$$z = \frac{s}{b} \Rightarrow S = zb \text{ (самостоятельное рещ-е)}$$

$$V(b) = \begin{cases} 0, & b \leq 0 \\ V_0, & b > 0 \end{cases}$$



$$z > z_0; \rho(z) = \rho_0, c(z) = c_0$$

$$V(z) = V_0 > 0; z = 0 - \text{положение поршня}$$

$$V(0) = -\frac{2C_0}{\gamma-1}$$

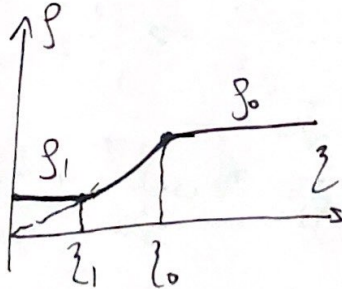
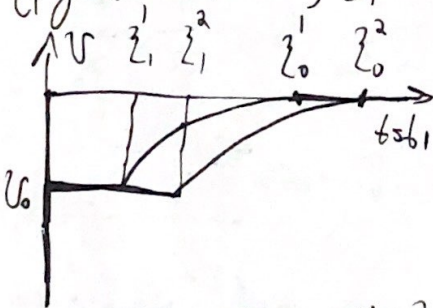
но р-е при $z = z_0$ $V = 0$. Газ примыкает к поршню, движется со ск-тью поршня (поршень движется со ск-тью $(-V_0)$)

по непрерывности, направим кривую V .

$$\text{Найдём } z_1; V = \frac{2C_0}{\gamma-1} \left(\left(\frac{z_1}{z_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - 1 \right) = -V_0 \Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{-V_0(\gamma-1)}{2C_0} + 1$$

$$\Rightarrow z_1 = z_0 \left(1 - \frac{V_0(\gamma-1)}{2C_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}; z_0 \text{ движется по } S; S = zb \Rightarrow S_0 = C_0 \rho_0 b$$

z_1 движется по S ; $S_1 = c_1/b_1 <$ местная массовая ск-ть звука



Рещ-е непрерывное, с произвольным термом разрывом $\Rightarrow$ "слабое" рещ-е

$$\rho' = \rho_0 \cdot \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}-1} \cdot \left(\frac{1}{z_0} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}} = \frac{\rho_0}{z_0^{\frac{2}{\gamma+1}}} \cdot \frac{2}{\gamma+1} \cdot z^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}$$

$$\rho'' = \rho_0 \cdot \frac{1}{z_0^{\frac{2}{\gamma+1}}} \cdot \frac{2}{\gamma+1} \cdot \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right) z^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}-1}$$

